

Übungen zur Vorlesung Numerik I

(Blatt 8)

Sommersemester 2004

**Abgabe der Aufgaben bis 15.06.04, 18.00 Uhr
im Postfach 84 Ebene 6**

Aufgabe 1:

(4 Punkte)

Für $\alpha > 0$ sei

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{für } x \geq 0 \\ -|x|^\alpha & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Sei $x_0 > 0$ Startwert des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle $\bar{x} = 0$ von f .

- Für welche $\alpha > 0$ konvergiert das Newton-Verfahren?
- Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren für $\alpha > \frac{1}{2}, \alpha \neq 1$, nur linear konvergiert.

Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Beweisen Sie, daß das Newton-Verfahren zur Funktion

$$f(x) = x^n - a, \quad a > 0, n \geq 2,$$

für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die positive Nullstelle $\bar{x} = a^{\frac{1}{n}}$ von f konvergiert. Überlegen Sie dazu, daß gilt

- $x_1 \geq \bar{x}$ für alle $x_0 > 0$.
- $\bar{x} < x_{k+1} < x_k$ für alle $k \geq 1$ und $x_k > \bar{x}$.

Hinweis: Diskutieren Sie die Newton'sche Iterationsfunktion und deren Ableitung.

Aufgabe 3:

(6 Punkte)

a) Konvergenzverbesserung nach **Aitken**:Die Folge $x_k \subset \mathbb{R}$ sei linear konvergent gegen $\bar{x} \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$x_{k+1} - \bar{x} = (q + \varepsilon_k)(x_k - \bar{x}), \quad |q| < 1, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

Zeigen Sie: Gilt $x_k \neq \bar{x}$, so ist für genügend großes k die Folge

$$z_k := x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

erklärt und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} = 0.$$

Hinweis: Setzen Sie $e_k = x_k - \bar{x}$ und überlegen Sie

$$x_{k+1} - x_k = e_{k+1} - e_k, \quad x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = e_{k+2} - 2e_{k+1} + e_k.$$

- b) Verfahren von **Steffensen**: Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und sei \bar{x} ein Fixpunkt von f mit $|f'(\bar{x})| < 1$. Durch Kombination der Fixpunktiteration $x_{k+1} = f(x_k)$ mit dem Verfahren von **Aitken** in a) erhält man die Iteration

$$x_{k+1} = g(x_k) := x_k - \frac{(f(x_k) - x_k)^2}{f(f(x_k)) - 2f(x_k) + x_k}.$$

Zeigen Sie, daß dieses Verfahren (mindestens) die Ordnung $p = 2$ hat.*Hinweis:* Sei o.E. $\bar{x} = 0$. Benutzen Sie $f(x) = f'(0)x + O(x^2)$ und zeigen Sie $g(x) = O(x^2)$.